- **Problème**

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)$

1°) Calculer $f'(x)$ étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f .

2°) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en -1^+ .

3°) Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, non nulle, que l'on désigne par α . Préciser α à 10^{-2} près.

4°) Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $] -1 ; +\infty[$

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $] -1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$

1°) Étude de g aux bornes de son ensemble de définition.

a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2°) Sens de variation de g .

a) Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.

b) Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha \approx -0,715$.

3°) Tableau et représentation graphique de g .

a) Dresser le tableau de variation de la fonction g .

b) Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm)

- **Exercice I**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système :
$$\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases}$$